

Gara nazionale 1994

1. Si dimostri che esiste un intero N tale che per ogni $n \geq N$ è possibile suddividere un quadrato in n quadratini a due a due disgiunti. (Due quadratini sono considerati disgiunti se non hanno punti interni in comune).
2. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $y^2 = x^3 + 16$.
3. Un giornalista deve fare un articolo su una classica isola di furfanti e cavalieri, in cui tutti gli abitanti o mentono sempre (e sono furfanti) o dicono sempre la verità (e sono cavalieri) e tutti si conoscono reciprocamente. Supponiamo che il giornalista intervisti una e una sola volta tutti gli abitanti ed ottenga nell'ordine le seguenti risposte:
 A_1 : "sull'isola c'è almeno 1 furfante"
 A_2 : "sull'isola ci sono almeno 2 furfanti"
...
 A_{n-1} : "sull'isola ci sono almeno $n - 1$ furfanti"
 A_n : "sull'isola ci sono n furfanti"
Può il giornalista stabilire se sull'isola ci sono più furfanti o più cavalieri?
4. Si consideri una retta r ed un triangolo ABC che giace in uno dei due semipiani individuati da r . Detti A', B', C' i punti simmetrici di A, B, C rispetto a r , si conduca da A' la parallela a BC , da B' la parallela ad AC e da C' la parallela ad AB . Si dimostri che queste tre rette passano per uno stesso punto.
5. Si consideri un cubo di spigolo unitario e sia OP una sua diagonale. Si determini il valore minimo e il valore massimo dell'area della figura che risulta dall'intersezione fra il cubo e un piano passante per OP .
6. Si consideri una scacchiera 10×10 e in ogni sua casella siano indicati ordinatamente i numeri da 1 a 100 incominciando dalla prima casella in alto a sinistra, andando verso destra fino a terminare la prima riga e poi proseguendo con la seconda riga sempre da sinistra a destra, fino ad arrivare alla centesima casella in basso a destra. Supponiamo ora di cambiare i segni a 50 di questi numeri con la condizione che in ogni riga e in ogni colonna ci siano tanti numeri positivi quanti negativi. Si dimostri che, dopo tale cambiamento, la somma di tutti i numeri è zero.